

textes de base



en pédagogie

Didactique des mathématiques

sous la direction de
J. Brun

M. Artigue
Guy Brousseau
J. Brun

Y. Chevallard
F. Conne
G. Vergnaud



delachaux
et niestlé

Didactique des mathématiques

Depuis plus d'une vingtaine d'années, la didactique des mathématiques comme domaine de recherche a forgé des problématiques et des concepts que ce recueil de textes de base contribue à rassembler. Sont réunis des textes fondamentaux de Guy Brousseau, Yves Chevallard et Gérard Vergnaud sur les notions de *situation*, *contrat*, *transposition didactiques* et *champ conceptuel*. Chacun de ces textes, publiés séparément auparavant, met en relief l'une des trois approches, *systémique*, *anthropologique* et *cognitive*, qui caractérisent l'étude actuelle des phénomènes didactiques en mathématiques.

Avec ces problématiques et ces concepts *l'ingénierie didactique* s'impose en tant que méthodologie privilégiée de la recherche en didactique des mathématiques.

Deux essais complètent cet ensemble de textes, essais qui envisagent les rapports entre les ordres didactiques et cognitifs de l'enseignement et de l'apprentissage des savoirs.

Jean Brun, docteur de troisième cycle en psychologie de l'Université Lyon II, est actuellement professeur en didactique des mathématiques à la Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation de l'Université de Genève. Ses travaux ont pour thème l'étude des rapports entre le développement cognitif et l'enseignement des mathématiques en prenant en compte la situation d'enseignement, et ce, aux niveaux de la scolarité des élèves de 6 à 12 ans.

Lausanne, Paris, 1996

Chapitre 4**Ingénierie didactique**

M. Artigue

Introduction

La notion d'ingénierie didactique a émergé en didactique des mathématiques au début des années 1980. Il s'agissait d'étiqueter par ce terme une forme du travail didactique, celle comparable au travail de l'ingénieur qui, pour réaliser un projet précis, s'appuie sur les connaissances scientifiques de son domaine, accepte de se soumettre à un contrôle de type scientifique mais, dans le même temps, se trouve obligé de travailler sur des objets beaucoup plus complexes que les objets épurés de la science et donc de s'attaquer pratiquement, avec tous les moyens dont il dispose, à des problèmes que la science ne veut ou ne peut encore prendre en charge.

Cet étiquetage est alors perçu comme le moyen d'aborder deux questions cruciales, vu l'état du développement de la didactique des mathématiques à l'époque :

- les rapports entre la recherche et l'action sur le système d'enseignement,
- le rôle qu'il convient de faire jouer aux "réalisations didactiques" en classe, au sein des méthodologies de la recherche didactique.

Ces préoccupations sont manifestes par exemple dans le texte que prépare Y.Chevallard pour la Seconde Ecole d'Eté de Didactique

des Mathématiques qui se tient à Orléans en 1982 (Chevallard 1982). Il y écrit notamment, concernant le premier point:

"Poser le problème de l'ingénierie didactique, c'est poser, en le rapportant au développement actuel et à venir de la didactique des mathématiques, le problème de l'action, et des moyens de l'action, sur le système d'enseignement." (p.28)

Et, il critique ensuite vigoureusement la manière dont ces rapports sont traditionnellement envisagés, en termes d'innovation ou de recherche-action:

"On voit ainsi dans quelle terrible logique, dans quel implacable déterminisme, l'idéologie de l'innovation tend à enfermer l'approche du système éducatif: l'innovation, comme valeur idéologique, ne prend son essor que parce que l'absence d'une histoire scientifique dans le domaine de l'éducation laisse libre cours à toutes les prétentions (et parmi celles-ci, à quelques impostures –l'innovateur ne s'autorise que de lui-même), et, inversement, la pesée dans les consciences et dans les pratiques de l'obsession innovatrice empêche le "décollage" d'une histoire propre au champ concerné, en interdisant d'en constituer les objets en objets d'un savoir progressif." (p. 13)

"Ce qui est essentiel est que, en accolant ainsi deux moments du processus scientifique-technique [recherche et action] sans les articuler, on réduit la signification de chacun. On se déliera des contraintes qui pèsent normalement sur toute recherche en répondant que c'est l'action, entendue d'ailleurs comme bonne action, qui commande; l'action "accomplie", on la déclarera comme ayant constitué une "recherche", échappant donc par là au jugement de valeur auquel nous acceptons ordinairement de soumettre nos actions les plus banales". (p.20)

En ce qui concerne la deuxième question: la place des réalisations didactiques en classe dans la recherche, il axe son argumentation sur deux points:

1. Les méthodologies que, dans cet article je qualifierai d'*externes* (parce qu'*externes* à la classe): questionnaires.. entretiens, tests, sur lesquelles se fondent la majeure partie des recherches publiées à l'époque, sans aucun doute parce qu'elles sont plus aisées à utiliser et à faire reconnaître comme productrices de résultats scientifiques, sont insuffisantes à attraper la complexité du système étudié et les privilégier serait un risque majeur pour la didactique, vu sa jeunesse théorique:

"Ce qui qualifie aujourd'hui, de manière actuellement indépassable -à l'échelon de notre communauté- la réalisation didactique, [..] c'est l'incapacité où nous nous trouvons, étant donné le faible développement de notre théorie du système didactique, et par conséquent la faiblesse du contrôle par la théorie des opérations de la recherche, de rencontrer notre objet de connaissance autrement que sous les espèces, ou du moins hors du contrôle "empirique", de l'objet réel dont l'élaboration théorique nous occupe.- délaisser trop longtemps -pour se tourner vers des méthodologies auxiliaires, parcellaires - le système didactique pris dans son fonctionnement concret 1 .. 1 c'est prendre le risque de négliger ce qui n'est nullement négligeable, et qui pourrait pourtant s'effacer de notre champ de conscience à n'y être pas empiriquement -c'est-à-dire agressivement-- présent." (p.50)

2. La réalisation didactique en classe a une autre fonction essentielle, permanente elle en temps que non liée à la jeunesse

théorique du champ, c'est celle de mise à l'épreuve des constructions théoriques élaborées dans les recherches, par l'engagement de ces constructions dans un mécanisme de production:

" La réalisation didactique constitue aussi le lieu de cette étape cruciale de l'activité scientifique à laquelle Bachelard a donné le nom parodique de pbénoméno-technique." (p.55)

Ainsi donc, finalement, il s'agit:

- d'une part de se dégager de rapports entre recherche et action pensés soit en terme d'innovation, soit par l'intermédiaire de la notion de recherche/action pour affirmer la possibilité d'une action rationnelle sur le système basée sur des connaissances didactiques préétablies,
- d'autre part de marquer l'importance de la "réalisation didactique" en classe comme pratique de recherche, à la fois pour des raisons liées à l'état de jeunesse de la recherche didactique et pour répondre à des besoins permanents, eux, de mise à l'épreuve des constructions théoriques élaborées.

Et, effectivement, c'est avec cette double fonction que la notion d'ingénierie didactique va tracer son chemin dans l'édifice didactique, en arrivant à désigner à la fois des productions réalisées pour l'enseignement à l'issue de recherches ayant fait appel à des méthodologies externes à la classe et une méthodologie de recherche spécifique. C'est aux caractéristiques de cette méthodologie que nous nous attacherons dans le paragraphe suivant.

L'ingénierie didactique, méthodologie de recherche

Quelques caractéristiques générales

1. L'ingénierie didactique, vue comme méthodologie de recherche, se caractérise en premier lieu par un schéma expérimental basé sur des "réalisations didactiques" en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement. On y distingue classiquement deux niveaux, celui de la *micro-ingénierie* et celui de la *macro-ingénierie*, suivant l'importance de la réalisation didactique impliquée dans la recherche. Les recherches de micro-ingénierie sont certes plus aisées à mettre en place, mais si elles permettent de prendre en compte, de façon locale, la complexité du phénomène classe, elles ne permettent pas de composer cette complexité avec celle, essentielle, des phénomènes liés à la durée dans les rapports enseignement/apprentissage. Elles ne permettent pas non plus nécessairement un découpage cohérent des objets de connaissance. Les recherches de macro-ingénierie s'avèrent donc, en dépit de toutes les difficultés méthodologiques et institutionnelles qu'elles présentent, incontournables.

2. La méthodologie d'ingénierie didactique se caractérise aussi, par rapport à d'autres types de recherche basés sur des expérimentations en classe, par le registre dans lequel elle se situe et les modes de validation qui lui sont associés. En effet, les recherches ayant recours à des expérimentations en classe se situent le plus souvent dans une approche comparative avec validation externe basée sur la comparaison statistique des performances de groupes expérimentaux et de groupes témoins.

Ce paradigme n'est pas celui de l'ingénierie didactique qui se situe, à l'opposé, dans le registre des études de cas et dont la validation est essentiellement interne, fondée sur la confrontation entre analyse *a priori* et analyse *a posteriori*.

3. En revanche, les objectifs d'une recherche d'ingénierie didactique peuvent être divers. R. Douady, dans sa communication au congrès PME 11 intitulée "L'ingénierie didactique, un instrument privilégié pour une prise en compte de la complexité de la classe" (Douady 1987), distingue par exemple les recherches qui visent l'étude des processus d'apprentissage d'un concept donné et donc en particulier l'élaboration de genèses artificielles pour un concept donné, de celles qui sont transverses aux contenus, même si leur support est l'enseignement d'un domaine précis. Elle cite à ce propos les travaux de M.C. Marilier, A. Robert et I. Tenaud sur apprentissage de méthodes et le travail en groupe (Marilier, Robert, Tenaud 1987), mais l'on pourrait en évoquer bien d'autres: travaux visant le domaine paramathématique (Chevallard 1985) c'est-à-dire celui de ces notions qui, comme celles de paramètre, d'équation, de démonstration, gardent un statut d'outil dans l'enseignement, au moins à un niveau donné, ou encore travaux visant l'étude et la mise en place de stratégies didactiques globales comme par exemple "le problème ouvert" (Arsac et Al. 1988), "le débat scientifique" (Legrand 1986) et (Alibert 1989).

Ce n'est donc pas par les objectifs des recherches menées sous sa bannière, mais bien par les caractéristiques de son fonctionnement méthodologique que l'ingénierie didactique pose sa singularité. Dans ce qui suit, nous allons essayer de présenter les traits caractéristiques à l'heure actuelle de cette méthodologie,

tels qu'ils se dégagent des recherches qui s'en réclament, recherches qui, il faut le souligner, se sont multipliées ces dernières années. A ce point de l'exposé, je me bornerai à mentionner les deux travaux qui constituent, à mes yeux, les classiques incontournables dans ce domaine, à savoir les thèses de G. Brousseau (Brousseau 1986) et de R. Douady (Douady 1984), des travaux exceptionnels à la fois en raison de l'ampleur des réalisations didactiques concernées et en raison de l'importance de l'apport théorique auquel ces réalisations didactiques ont conduit.

Les différentes phases de la méthodologie d'ingénierie

Nous suivrons, dans ce paragraphe, pour décrire la méthodologie d'ingénierie didactique, le découpage temporel de son processus expérimental. Nous distinguerons dans ce processus quatre phases: la phase 1 des analyses préalables, la phase 2 de la conception et de l'analyse *a priori* des situations didactiques de l'ingénierie, la phase 3 de l'expérimentation et enfin la phase 4 de l'analyse *a posteriori* et de l'évaluation.

Les analyses préalables

Dans une recherche d'ingénierie didactique, la phase de conception s'effectue en s'appuyant sur un cadre théorique didactique général et sur les connaissances didactiques déjà acquises dans le domaine étudié, mais aussi en s'appuyant sur un certain nombre d'analyses préliminaires, le plus souvent:

- l'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement,

- l'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets,
- l'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et obstacles qui marquent leur évolution,
- l'analyse du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation didactique effective,
- et bien sûr en prenant en compte les objectifs spécifiques de la recherche.

Cette présentation appelle quelques commentaires. Généralement, bien que ce ne soit pas visible au niveau des publications, les travaux réalisés par le chercheur pour servir de base à la conception de l'ingénierie, sont repris et approfondis au fil des différentes phases du travail, en fonction des besoins ressentis, et ils ne sont donc préalables qu'à un premier niveau d'élaboration. Il est clair, de plus, que les exigences d'analyse préalable ne seront pas les mêmes pour une recherche dont l'objectif est la construction d'une genèse artificielle de la connaissance dans un champ conceptuel déterminé, comme par exemple celle réalisée par B.Parzysz dans sa thèse (Parzysz 1989) et présentée en association avec ce cours, et pour une recherche qui, par exemple, vise la mise en place d'une stratégie globale d'enseignement comme celle du débat scientifique, déjà citée.

Dans les travaux publiés d'ailleurs, le plus souvent, les différentes composantes d'analyse mentionnées plus haut n'interviennent pas toutes de façon explicite. Ce peut être un excellent exercice de didactique d'identifier, à propos de travaux précis, les dimensions privilégiées et d'essayer d'en chercher *a posteriori* la signification didactique.

Je me bornerai ici à donner un seul exemple, issu de mes travaux personnels, tout en essayant de préciser en quoi il est ou non particulièrement représentatif du fonctionnement méthodologique de l'ingénierie. Il s'agit d'un article concernant la recherche que je mène depuis trois ans sur l'enseignement des équations différentielles en DEUG première année (Artigue 1989). Ce texte présente, par rapport aux préoccupations de ce paragraphe, l'intérêt d'être justement centré sur les deux premières phases de l'ingénierie. La première phase est structurée autour de l'analyse du fonctionnement de l'enseignement usuel, considéré comme état d'équilibre du fonctionnement d'un système, un équilibre qui fut longtemps stable mais dont on sent poindre l'obsolescence. L'extrait suivant met bien en évidence les choix effectués à ce niveau et comment ces choix sont reliés à la perspective systémique qui constitue l'ancrage théorique de l'analyse:

" La recherche rapportée ici se situe dans un perspective d'ingénierie didactique classique.- on considère un point du système didactique dont le fonctionnement apparaît, pour des raisons qui peuvent être de nature diverse, peu satisfaisant. On analyse ce point de fonctionnement et les contraintes qui tendent à en faire un point d'équilibre du système puis, en jouant sur ces contraintes, on cherche à déterminer les conditions d'existence d'un point de fonctionnement plus satisfaisant."

Cette analyse des contraintes va s'appuyer sur l'identification, dans le champ mathématique considéré, de trois cadres de développement et de fonctionnement, la notion de cadre (Douady 1984) jouant donc ici le rôle d'appui théorique didactique général. Ces cadres sont les suivants: le cadre algébrique de la résolution par formules, le cadre numérique de la résolution

numérique approchée et le cadre géométrique de l'étude globale qualitative du flot de l'équation.

Ces cadres étant introduits, l'analyse des contraintes va s'effectuer en distinguant trois dimensions :

- la dimension *épistémologique* associée aux caractéristiques du savoir en jeu,
- la dimension *cognitive* associée aux caractéristiques cognitives du public auquel s'adresse l'enseignement,
- la dimension *didactique* associée aux caractéristiques du fonctionnement du système d'enseignement.

Notons que cette classification n'a rien d'original. Elle découle naturellement de la perspective systémique explicitement adoptée. Il n'y a rien d'étonnant donc à constater que l'on retrouve ici une classification parallèle à celle proposée dès 1976 par G. Brousseau pour l'étude des obstacles (Brousseau 1976).

L'enseignement usuel est centré sur le fonctionnement dans le cadre algébrique. Il apparaît donc assez naturel de chercher, compte tenu de l'objectif précis de la recherche: étudier la viabilité d'une approche épistémologiquement plus satisfaisante, les contraintes qui s'opposent à l'extension de l'enseignement à d'autres cadres.

C'est ce qui est effectivement fait et, par exemple, les contraintes suivantes sont identifiées comme s'opposant à l'extension au cadre géométrique:

- sur le plan épistémologique: la longue domination de l'algébrique dans le développement historique de la théorie, la difficulté des problèmes liés à la naissance et au développement de la théorie géométrique et le développement uniquement récent du processus de transposition didactique jusqu'à un niveau

- d'enseignement relativement élémentaire,
- sur le plan cognitif.- l'exigence de mobilité permanente entre cadres nécessitée par l'étude qualitative (la mobilité étant ici d'autant plus délicate qu'elle s'accompagne de décalage de niveaux: passage du niveau des courbes dans le cadre graphique à celui des dérivées dans le cadre algébrique de l'équation) et le niveau de maîtrise des outils élémentaires de l'analyse requis par les justifications,
 - sur le plan didactique: la force du refuge algorithmique (ce refuge se trouve bloqué ici, l'étude qualitative pouvant donner lieu au développement de méthodes mais ne pouvant être algorithmisée), le statut infra-mathématique dans l'enseignement du cadre graphique, le mythe de la résolution complète (l'étude qualitative va mettre la plupart du temps l'enseignant dans la position de devoir s'arrêter en chemin, d'admettre qu'il ne peut pas répondre à toutes les questions qui se posent naturellement).

Soulignons que, contrairement à ce que l'on peut constater dans d'autres travaux d'ingénierie, et en particulier dans ceux déjà cités de R. Douady et G. Brousseau, l'accent n'est pas mis ici sur un cadre théorique didactique général. Ceci s'explique aisément: par rapport au problème posé, à savoir une étude de conditions de viabilité, la théorie didactique constitue un appui que le chercheur utilise à la façon d'un ingénieur. Ce n'est pas cette face de son activité qu'il mettra en avant dans un article de recherche destiné à sa communauté scientifique, mais bien plutôt, consciemment ou inconsciemment, ce qu'il ressent comme avoir constitué son œuvre de chercheur. Ceci n'empêche pas que la recherche menée puisse avoir par ailleurs des retombées théoriques générales mais, sauf à falsifier la problématique

initiale, elles ne peuvent se manifester dans cette phase. On les retrouvera alors naturellement au niveau des phases d'analyse *a posteriori* et d'évaluation. C'est le cas par exemple dans la thèse de D. Grenier (Grenier 1988): elle comporte une partie d'ingénierie classique concernant l'enseignement de la symétrie orthogonale en sixième mais les derniers chapitres développent une étude plus théorique des phases de bilan et d'institutionnalisation, étude dont la nécessité s'est imposée du fait de l'expérimentation.

L'analyse détaillée de ce texte met également en évidence la domination des entrées épistémologique et didactique par rapport à la dimension cognitive: à n'y a pas d'étude préalable des conceptions des étudiants et les contraintes identifiées à ce niveau sont inférées de résultats plus globaux concernant la didactique de l'analyse dans son ensemble ou de considérations générales comme la complexité cognitive engendrée par la mobilité nécessaire de point de vue. On insiste d'autre part sur la difficulté rencontrée à identifier des contraintes relevant sans ambiguïté du registre cognitif, les candidates à ce titre apparaissant toujours imbriquées avec, sinon renforcées par, des contraintes didactiques (issues peut-être d'ailleurs des manœuvres d'évitement qu'élabore le système d'enseignement face aux contraintes cognitives qu'il rencontre). Cette faible importance accordée au cognitif n'est pas typique des analyses préalables d'ingénieries. Très souvent, au contraire, un des points d'appui essentiels de la conception réside dans l'analyse préalable fine des conceptions des élèves, des difficultés et erreurs tenaces, et l'ingénierie est conçue pour provoquer, de façon contrôlée, l'évolution des conceptions. C'est le cas par exemple dans les deux thèses récentes déjà citées de D.Grenier et B.Parzys. Le

point de vue résolument systémique adopté comme le niveau d'enseignement concerné ne sont sans doute pas sans influence sur les dimensions privilégiées ici.

Conception et analyse a priori

Dans cette seconde phase, le chercheur prend la décision d'agir sur un certain nombre de variables du système non fixées par les contraintes: *variables de commande* dont il suppose quelles sont des variables pertinentes par rapport au problème étudié. Il nous semble utile, pour faciliter l'analyse d'une ingénierie, de distinguer deux types de variables de commande :

- *les variables macro-didactiques ou globales* qui concernent l'organisation globale de l'ingénierie,
- *et les variables micro-didactiques ou locales* qui concernent l'organisation locale de l'ingénierie, c'est-à-dire l'organisation d'une séance ou d'une phase, les unes et les autres pouvant être elles-mêmes des variables d'ordre général ou des variables dépendantes du contenu didactique dont l'enseignement est visé.

Au niveau micro-didactique, cette seconde distinction est classique puisqu'on distingue les variables dites du problème des variables dites de situation reliées à l'organisation et à la gestion du milieu (Brousseau 1986), les variables didactiques étant, parmi elles, celles dont la preuve de l'effet didactique a été attesté.

Pour ne pas multiplier les exemples différents, je reviendrai une fois de plus à la recherche sur les équations différentielles telle qu'elle apparaît à travers le texte cité. Les premiers choix présentés, après l'analyse des contraintes, sont des choix globaux: recours à l'outil informatique, développement de précurseurs adaptés au niveau fonction, limitation de la

complexité au niveau de la résolution algébrique, transfert en travail autonome de la part algorithmisée de cette résolution, enseignement explicite de méthodes enfin, pour l'étude qualitative. Ces choix précèdent la description phase à phase de l'ingénierie où vont intervenir les choix locaux.

Ce type de dispositif se retrouve généralement dans les textes de macro-ingénierie, mais derrière une terminologie éminemment variable.

- Dans son article sur l'enseignement des décimaux, G.Brousseau présente au départ des choix macro-didactiques, qualifiés "d'options principales", liés pour la plupart au contenu (Brousseau 1981):

"a) L'acquisition des décimaux-mesure suivra un processus distinct de celui visant les décimaux-application. Ils se succéderont dans cet ordre.

b) Dans les deux cas, les décimaux seront présentés comme des rationnels, simple réécriture des fractions décimales

c) Les fractions décimales-mesure seront choisies par les élèves pour approcher les rationnels à cause des facilités de calcul qu'elles présentent [...].

d) Cette approche topologique ne sera pas reproduite dans l'étude des applications linéaires rationnelles [...].

e) Nous tenterons de faire acquérir, ou fonctionner, s'ils sont acquis, les modèles implicites avant d'en provoquer la formulation et l'analyse [...].

f) Les sommes et les différences d'applications rationnelles, bien que rencontrées, ne seront pas théorisées ni institutionnalisées.

g) Nous expliciterons les autres options au cours de l'exposé des situations..

Il entre ensuite dans la description du canevas du processus d'enseignement où vont intervenir les choix locaux, présentés dans le langage "canonique" de la théorie des situations didactiques, c'est-à-dire en termes de variables, sauts informationnels, coûts...

- D.Grenier, dans sa thèse déjà citée, intitule un paragraphe: "Nos choix didactiques pour l'approche de la notion", avant de rentrer elle aussi dans l'analyse des différentes phases du processus. Elle distingue dans ce paragraphe un "cadre didactique", qui correspond en fait à des choix macro-didactiques spécifiques du contenu, et un "cadre théorique" où elle se situe par rapport à la théorie des situations didactiques, et qui relève donc du macro-didactique général.

Je voudrais souligner, avant de passer à l'analyse *a priori*, que ces choix globaux, même s'ils sont présentés en amont des choix locaux, n'en sont pas pour autant indépendants. En particulier, comme le souligne G.Brousseau (1981):

"Il faut s'assurer constamment de la capacité de la conception générale à permettre l'invention, l'organisation et le déroulement de situations locales" (conformes donc aux cadres théoriques généraux sur lesquels s'appuie l'ingénierie).

Une des originalités de la méthode d'ingénierie didactique, nous l'avons souligné plus haut, réside dans son mode de validation, essentiellement interne. C'est dès la phase de conception, via l'analyse *a priori* des situations didactiques de l'ingénierie, étroitement liée à la conception locale de cette dernière, que ce processus de validation va s'engager.

Cette analyse *a priori* est à concevoir comme une *analyse du contrôle du sens*: très schématiquement, si la théorie

constructiviste pose le principe de l'engagement de l'élève dans la construction de ses connaissances par l'intermédiaire d'interactions avec un certain milieu, la théorie des situations didactiques, qui sert de référence à la méthodologie d'ingénierie, a eu, dès son origine, l'ambition de se constituer comme une théorie du contrôle des rapports entre sens et situations. Notons que nous entendons ici cette théorie au sens large, y incluant, outre les constructions théoriques élaborées par G.Brousseau depuis plus de vingt ans --et l'on pourra par exemple, pour une des premières versions de la théorie, se référer à (Brousseau 1972)- celles élaborées en connexion plus ou moins étroite par divers chercheurs, notamment celles de R.Douady.

L'objectif de l'analyse *a priori* est donc de déterminer en quoi les choix effectués permettent de contrôler les comportements des élèves et leur sens. Pour ce, elle va se fonder sur des hypothèses et ce sont ces hypothèses dont la validation sera, en principe, indirectement en jeu, dans la confrontation opérée dans la quatrième phase entre analyse *a priori* et analyse *a posteriori*.

Traditionnellement, cette analyse qui comporte une partie descriptive et une partie prédictive est une analyse centrée sur les caractéristiques d'une situation a-didactique que l'on a voulu constituer et dont on va chercher à faire la dévolution aux élèves:

- on décrit les choix effectués au niveau local (en les rapportant éventuellement à des choix globaux) et les caractéristiques de la situation a-didactique qui en découlent,
- on analyse quel peut être l'enjeu de cette situation pour l'élève, en fonction en particulier des possibilités d'action, de choix, de décision, de contrôle et de validation dont il dispose, une fois opérée la dévolution, dans un

fonctionnement quasi isolé du maître,

- on prévoit des champs de comportements possibles et on essaie de montrer en quoi l'analyse effectuée permet de contrôler leur sens et d'assurer en particulier que les comportements attendus, s'ils interviennent, résulteront bien de la mise en œuvre de la connaissance visée par l'apprentissage.

Le texte préparé par exemple par des chercheurs de IIREM de Bordeaux pour l'Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques d'Orléans, en 1986, et intitulé: "Quelques questions pour le contrôle a priori d'une situation didactique donnée" témoigne bien de ces caractéristiques de l'analyse a priori. Les titres des différentes rubriques d'analyse sont en effet les suivants.

1. *Quel est le problème que chacun des élèves a en charge de résoudre?*
2. *Peut-on expliciter ce problème en termes de théorie des jeux?*
3. *Qu'est-ce qu'il suffit à l'élève de savoir ou savoir faire pour comprendre la consigne (entrer dans le jeu)?*
4. *Qu'est-ce qu'il suffit à l'élève de savoir ou de savoir faire pour réussir (gagner au jeu)?*
5. *Quel est le contrôle que l'élève a sur son action?*
6. *Y a-t-il plusieurs phases?"*

Soulignons que la théorie des jeux, même lorsqu'elle apparaît explicitement comme ici, est souvent prise en compte par le chercheur à un niveau purement métaphorique.- il est question de stratégies, de jeu mais il n'y a pas d'évaluation précise des coûts de telle ou telle stratégie, comme cela a pu être fait par

G.Brousseau et certains chercheurs de son équipe, par exemple H. Ratsimba Rajohn (Ratsimba Rajohn 1982). On a l'impression qu'une utilisation autre que métaphorique est perçue par le chercheur, même si elle est possible, comme trop coûteuse par rapport au bénéfice attendu en termes de finesse d'analyse et/ou de validation.

Traditionnellement, l'enseignant est peu présent dans l'analyse *a priori* et envisagé essentiellement dans ses rapports à la dévolution et à l'institutionnalisation. Cette mise à l'écart relative de l'enseignant a des raisons historiques évidentes si l'on considère le développement de la recherche didactique. La didactique des mathématiques s'est constituée en France sur la base des théories constructivistes de la connaissance, profondément influencée par les travaux de psychologie génétique de l'école genevoise (la fréquence des références à Piaget et en particulier à (Piaget 1975) dans les publications en est par exemple la marque manifeste), en opposition donc aux théories empirico-sensualistes ou behaviouristes de l'apprentissage qui sous-tendent plus ou moins explicitement l'épistémologie naïve de l'enseignement. Dans cette perspective, la première urgence était, sans aucun doute, de restituer sa place à l'élève. Le développement naissant de la didactique imposant par ailleurs une limitation relativement stricte à la complexité susceptible d'être attaquée scientifiquement, c'est l'enseignant qui a en quelque sorte payé le prix de la prise en compte de l'élève, au niveau de la modélisation et de la théorisation.

Ce n'est ainsi pas un hasard si, alors que les situations d'action, de formulation et de validation sont présentes dès les premiers embryons de la théorie des situations, les situations d'institutionnalisation n'ont été introduites que beaucoup plus tard

puis, parce qu'elles se prêtaient mal à la modélisation usuelle des situations, si elles sont devenues des phases d'institutionnalisation: ce sont des moments où l'analyse en termes de jeu de l'enseignant doit nécessairement prendre le pas sur celle en terme de jeu de l'élève. Dans l'analyse *a priori*, il n'y a pas traditionnellement de place pour le jeu du maître: si l'élève est pris en compte à un double niveau: descriptif et prédictif, le maître n'intervient, lui, qu'à un niveau descriptif, comme si la situation le déterminait complètement en tant qu'acteur du système.

Il y a peut-être d'ailleurs à la réticence affichée par beaucoup de chercheurs à utiliser la théorie des jeux à un niveau autre que métaphorique mentionnée plus haut, des raisons autres que les raisons économiques que nous avons invoquées. Ne peut-on y voir aussi un symptôme d'évitement, face aux contraintes fortes concernant les rapports entre la dimension a-didactique et la dimension didactique, qu'impose une utilisation autre que métaphorique? La conclusion de l'article déjà cité de H.Ratsimba Rajohn nous y incite. Il écrit en effet:

"Mais cette théorie du jeu que nous avons considérée, ne nous a pas permis de prévoir a priori les comportements des élèves et de l'enseignant au moment de la production des états intermédiaires du jeu.

En effet, lors de l'étude théorique, nous avons fait abstraction du jeu de l'enseignant, du jeu des élèves qui ont quelques idées pour résoudre le problème et du jeu de ceux qui n'ont pas trouvé. Cependant le travail que nous venons de réaliser a montré qu'il était impossible de faire l'économie du jeu de l'enseignant avec les élèves."

Certes la notion de contrat didactique permet de récupérer en partie cet enseignant, acteur à part entière du système, mais on ne peut nier que, pour l'instant, dans la théorisation didactique, l'enseignant occupe toujours une place marginale et que, faute de pouvoir être convenablement pris en compte, les phénomènes didactiques qui l'impliquent tendent à être perçus comme des bruits par rapport au fonctionnement dont l'étude est privilégiée: celle des relations élève/milieu à propos du savoir.

Cette question des rapports entre les dimensions a-didactique et didactique, dans la théorie didactique et la méthodologie d'ingénierie constitue un problème majeur car il engage en fait la validation de la méthodologie: si l'analyse *a priori* est principalement a-didactique et si une part essentielle des processus pertinents échappe à ce registre, que permet de valider ou d'invalider réellement la confrontation entre analyse *a priori* et analyse *a posteriori*? Ou encore: si les situations d'ingénierie sont nécessairement, pour être adaptées à cette méthodologie, fortement contraintes, que nous permettent-elles "d'attraper" comme phénomènes didactiques?

Expérimentation, analyse a posteriori et validation

Je ne m'étendrai pas sur la phase 3 d'expérimentation qui est classique. Cette phase est suivie d'une phase d'analyse dite *a posteriori* qui s'appuie sur l'ensemble des données recueillies lors de l'expérimentation: observations réalisées des séances d'enseignement mais aussi productions des élèves en classe ou hors classe. Ces données sont souvent complétées par des données obtenues par l'utilisation de méthodologies externes: questionnaires, entretiens individuels ou en petits groupes,

réalisés à divers moments de l'enseignement ou à son issue. Et, comme nous l'avons déjà indiqué, c'est sur la confrontation des deux analyses: analyse *a priori* et analyse *a posteriori* que se fonde essentiellement la validation des hypothèses engagées dans la recherche.

Le processus de validation interne qui est ici en jeu, ne tombe certes pas dans le piège usuel des validations statistiques associées à des expérimentations en classe qui consiste à se fonder implicitement sur le principe que les différences mesurables constatées sont liées aux variables de commande sur lesquelles on a joué pour différencier classes expérimentales et classes témoins. Il n'est pas pour autant sans poser problème. Nous avons soulevé, dans le paragraphe précédent, certaines questions à son propos, liées nous semble-t-il davantage à l'état épistémologique de la didactique que fondamentalement au processus lui-même. Nous voudrions, pour terminer ce paragraphe, pointer un certain nombre d'autres difficultés à ce niveau de la validation qui nous sont apparues à la lecture des travaux publiés d'ingénierie didactique.

- Une analyse *a priori*, du fait de sa longueur, *a fortiori* lorsqu'il s'agit d'un travail de macro-ingénierie, est pratiquement incommunicable *in extenso*. Ce qui est publié et visible de l'extérieur, n'est donc pas, sauf exercice d'école, un produit conforme à la description théorique qui en a été faite ici, mais un condensé de ce produit. Des choix sont faits et le contrôle extérieur qui peut être apporté par la communauté sur la démarche de validation s'en trouve nécessairement affecté.

- Dans la plupart des textes publiés relatifs à des ingénieries, la confrontation des deux analyses, *a priori et a posteriori*, laisse apparaître des distorsions, Elles sont loin d'être toujours analysées en termes de validation, à savoir en recherchant ce que, dans les hypothèses engagées, les distorsions constatées invalident. Très souvent, les auteurs se bornent à proposer des modifications de l'ingénierie visant à les réduire, sans s'engager donc véritablement dans une démarche de validation.
- Les hypothèses mêmes engagées explicitement dans les travaux d'ingénierie sont souvent des hypothèses relativement globales, mettant en jeu des processus d'apprentissage à long terme, que l'ampleur de l'ingénierie ne permet pas nécessairement de faire entrer réellement dans une démarche de validation.

L'ingénierie didactique, moteur de la progression didactique

L'ingénierie didactique a plongé le chercheur au sein de la complexité du système qu'il étudiait. De ce fait, même si en raison des contraintes de sa construction, cette méthodologie risquait de laisser échapper certains phénomènes repérables dans des observations "naturalistes" de classes, il était naturel qu'elle permette la mise en évidence de phénomènes didactiques qui avaient échappé à des méthodologies plus externes. Cela fut effectivement le cas si l'on considère le développement de la didactique : les notions d'institutionnalisation et plus récemment

celle de mémoire de la classe étudiée par J. Centeno (Centeno 1989), par exemple, lui doivent le jour. Nous avons choisi dans ce texte d'analyser ce rôle moteur de l'ingénierie, en nous intéressant plus particulièrement aux problèmes de transmission et de reproductibilité.

Obsolescence et reproductibilité

L'ingénierie didactique pose ces problèmes de manière nouvelle puisque d'une part, la réalisation expérimentale elle-même suppose déjà le plus souvent une "transmission" en direction du ou des enseignants qui en seront les acteurs, d'autre part parce que l'on ne peut, comme dans le cadre des méthodologies externes, importer aisément le "sens" de la reproductibilité de champs scientifiques voisins.

G. Brousseau, le premier, confronté au problème de la reproduction de son ingénierie didactique sur l'enseignement des décimaux, a attiré l'attention des chercheurs sur les phénomènes d'obsolescence. Il écrit à ce propos dans (Brousseau 1981):

«L'hypothèse de reproduction du même processus doit être envisagée principalement contre les deux suivantes:

- 1. celle d'une amélioration au moins locale,*
- 2. celle d'une obsolescence des situations didactiques.*

Nous entendons par obsolescence le phénomène suivant: les maîtres, d'une année à l'autre, ont de plus en plus de mal à reproduire les conditions susceptibles d'engendrer chez leurs élèves, à travers peut-être des réactions différentes, une même compréhension de la notion enseignée. Au lieu de reproduire des conditions qui tout en produisant le même résultat laissent libres les trajectoires, ils reproduisent au contraire une "histoire"; un

déroulement semblable à celui des années précédentes, par des interventions qui, même discrètes, dénaturent les conditions didactiques garantes d'une signification correcte des réactions des élèves: les comportements obtenus sont apparemment les mêmes mais les conditions dans lesquelles ils ont été obtenus en modifient le sens, plus proche du comportement culturel.»

On voit là s'affronter en fait deux types de reproductibilité: une *reproductibilité externe*, dynamique, qui se situe au niveau des "histoires" et une *reproductibilité interne*, sans aucun doute moins facile à identifier, qui elle se situe au niveau du sens. G. Brousseau fait alors l'hypothèse que l'obsolescence, si elle se produit, va tendre à faire évoluer les situations didactiques de l'ingénierie du registre des situations d'adaptation de l'élève à celui des situations de communication d'un savoir institutionnalisé et que, de ce fait, elle va entraîner *« d'une part, une évolution des questions choisies par le maître dans le sens d'une augmentation du nombre des problèmes formés et d'autre part une diminution des réussites aux questions les plus ouvertes.»* C'est à ces critères indirects qu'il se fiera pour décider, dans le cas qui l'intéresse, qu'il n'y a pas eu d'obsolescence, c'est-à-dire déviation vers une reproductibilité purement externe, de façon significative.

Dans ma thèse (Artigue 1984), je me suis réattaquée à ces problèmes de reproductibilité en essayant, dans un premier temps, de déterminer quels modèles implicites ou explicites de la reproductibilité véhiculaient les écrits didactiques. Il s'est avéré qu'ils véhiculaient, en fait de façon essentiellement implicite, un modèle de type externe que l'on pouvait en première approximation caractériser ainsi Artigue 1986) :

« On reconnaîtra les situations reproductibles aux caractéristiques suivantes: au cours d'expérimentations répétées, A1) Les mêmes procédures doivent apparaître (dit moins celles qui ne sont pas marginales) avec des hiérarchies comparables.

A2) L'histoire de la classe doit pouvoir être décrite par un petit nombre d'orbites.

A3) Les régularités observées au niveau des procédures et des orbites doivent être essentiellement le fait de régularités individuelles. Elles ne doivent pas être tributaires d'actions de recentrage ou de déblocage répétées de l'enseignant.

A4) Les légères perturbations qui ne peuvent manquer de se produire d'une classe à l'autre ne doivent pas avoir tendance à s'amplifier.»

La modélisation mathématique de ces caractéristiques et une étude probabiliste élémentaire m'ont alors permis de montrer que le champ de validité d'un tel modèle était théoriquement extrêmement réduit et ce, même si l'on se satisfaisait d'une reproductibilité très approchée comme celle que j'avais définie à partir de la notion de "voisinages d'histoires de classes". En d'autres termes, il était prouvé que la taille de l'échantillon classe était trop faible pour permettre le passage de régularités individuelles au niveau collectif.

Dans une deuxième phase, l'étude précise de la dynamique d'une situation expérimentée dans une recherche antérieure a permis de montrer que l'intégration au modèle des phénomènes d'interaction entre élèves observés au sein des classes ne permettait pas, à elle seule de garantir théoriquement une reproductibilité externe de la situation. En effet, d'une part les régularités externes que l'on pouvait espérer garantir, par le seul jeu des variables identifiées dans l'analyse *a priori* de cette

situation et dans l'étude de son fonctionnement, se situaient non au niveau des "histoires de classe" elles-mêmes mais au niveau plus complexe des structures de ces histoires, d'autre part dans l'apparition de ces régularités mêmes, le maître se révélait un acteur décisif. Elles n'étaient donc pas la conséquence d'un fonctionnement quasi-isolé.

Ceci conduit assez naturellement à faire l'hypothèse que les reproductibilités constatées en termes d'histoire, en particulier celles auxquelles G.Brousseau faisait allusion dans l'extrait cité plus haut concernant l'obsolescence, sont presque nécessairement forcées par des actions de contrôle de la dynamique, menées par l'enseignant de façon plus ou moins consciente et discrète. Allant plus loin, il me semble raisonnable, à l'heure actuelle, de faire à propos de la notion de reproductibilité l'hypothèse suivante: c'est en termes de *relation d'incertitude* qu'il convient de penser les rapports entre reproductibilité interne et reproductibilité externe. En d'autres termes, *une exigence forte de reproductibilité externe ne peut être satisfaite qu'en sacrifiant d'autant la reproductibilité interne* (qui est, en fait, celle visée).

Certains travaux récents, par exemple (Arsac 1989), en montrant l'effet macroscopique de décisions apparemment microscopiques dans des fonctionnements de classes (les termes de macro et micro étant utilisés ici en référence aux niveaux de description), vont dans le sens de cette analyse, en mettant bien en évidence que l'objet classe se rapproche davantage d'un point de vue dynamique des systèmes chaotiques que des systèmes stables auxquels se réfère implicitement le modèle naïf. Mais ils montrent bien également la difficulté qu'il peut y avoir pour la didactique à intégrer ces phénomènes de contrôle fin dans la modélisation, si ce n'est, comme l'avait déjà fait G. Brousseau

dans son travail sur l'obsolescence, en cherchant à repérer indirectement leur existence à travers un certain nombre d'indices, au nombre desquels devrait figurer, si les hypothèses faites plus haut sont fondées, une trop bonne reproductibilité externe.

Je voudrais souligner, pour conclure ce paragraphe, l'importance de l'enjeu de ces questions. Il nous est actuellement difficile de trouver des niveaux de description qui ne tombent à aucun moment dans les pièges de "l'externe". En particulier, quand nous décrivons des séquences d'enseignement en vue de leur transmission hors recherche, le fait de nous adresser à un public potentiel de non-didacticiens nous incite à gommer le didactique de la description. Selon un phénomène classique, de peur de ne pas être compris, nous quittons le registre de la communication scientifique pour celui de la pensée naturelle. Ce faisant, presque inévitablement, nous sacrifions les caractéristiques internes des situations didactiques au profit de caractéristiques externes, plus aisées à décrire, faisant par là même obstacle à la reproduction interne.

Ce sont justement les difficultés rencontrées dans la transmission didactique, pour les besoins de la recherche et plus encore à l'issue de celle-ci dans la transmission d'ingénieries didactiques, produits de développement, qui ont attiré l'attention des chercheurs sur un autre problème : celui des représentations que les enseignants se font des mathématiques, de leur apprentissage et de leur enseignement et de l'influence de ces représentations sur les choix qu'ils effectuent et les décisions qu'ils prennent dans leur enseignement.

Problèmes de transmission et représentations métacognitives

D.Grenier, par exemple, termine sa thèse déjà citée par la phrase suivante:

« En conclusion, nous soutenons l'idée qu'un processus n'est communicable que s'il comporte non seulement une étude des conceptions des élèves sur la notion, ce qui est assez classique en didactique, puisque le processus est construit généralement à partir de cette étude, mais aussi une étude des représentations qu'a l'enseignant d'une part du contenu du savoir enjeu et d'autre part de ses élèves, de leurs connaissances antérieures et de leur mode de construction des connaissances. »

G.Arsac écrit de son côté dans (Arsac 1989):

« Le chercheur se heurte au fait que l'enseignant qui expérimente une situation conçue par le premier "interprète" la situation. Cette interprétation de l'enseignant, qui se traduit concrètement par des initiatives imprévues pendant le déroulement de la séance de classe, nous semble devoir être prise comme objet d'étude en elle-même et non comme une sorte de "bruit" inévitable dans l'expérimentation. »

C'est à cette tâche qu'il s'attaque en exploitant une recherche menée dans le cadre du problème ouvert.

L'analyse fine du rôle de l'enseignant pendant la phase de recherche lui permet de mettre notamment en évidence la disproportion entre le caractère apparemment anodin de certaines interventions du maître et leurs effets réels. Pour tenter de faire rentrer ce type de phénomène dans l'analyse *a priori* des situa-

tions, il propose alors d'introduire, parallèlement à la notion de variable didactique, celle de "*choix didactique*" un choix didactique serait un choix de l'enseignant en situation qui amène un changement cognitif de l'enfant, qui change "le sens et la fonction" de la connaissance. Puis il pose le problème de l'intégration de ce niveau de description à l'analyse *a priori*, en soulignant justement la difficulté liée au fait que les choix didactiques qui *a posteriori* apparaissent décisifs sont souvent de l'ordre de la micro-décision didactique.

L'étude des phases de débat collectif est exploitée, elle, pour tenter d'éclaircir les motivations de ces choix didactiques de l'enseignant. G.Arsac arrive à la conclusion que l'influence du professeur sur le débat a pour origine, dans la situation particulière étudiée, plusieurs causes:

- « • la conception que l'enseignant se fait de la preuve en géométrie et de son lien avec le dessin !...1,
- la conception que l'enseignant se fait du rôle qu'il doit avoir dans la classe [...1,
- la représentation qu'il s'est construite du scénario qu'il doit mettre en place,
- le temps. »

Il va essayer de théoriser ces influences, en référence à divers travaux, en faisant intervenir "l'épistémologie du professeur", à savoir sa conception sur la nature des mathématiques, sa conception de l'enseignement et sa conception de l'apprentissage. On retrouve là les trois catégories introduites par A.Robert et J.Robinet dans leur définition des représentations métacognitives (Robert, Robinet 1989) et G. Arsac y fait d'ailleurs référence.

A.Robert et J.Robinet, dans leurs travaux récents (Robert, Robinet 1989), partent en effet de l'hypothèse que la transmission est conditionnée par les conduites des enseignants en classe. Or ces conduites ne sont pas improvisées; elles relèvent certes de certains choix instantanés, guidés par l'actualité, mais elles dépendent aussi de choix plus globaux relativement stables, dictés par la personnalité de l'enseignant et ses conceptions au sujet des mathématiques et de leur enseignement. A.Robert et J.Robinet font l'hypothèse que, de ce fait, une certaine compatibilité de conception entre les chercheurs à l'origine d'une ingénierie et les enseignants qui vont l'expérimenter ou chercher à l'utiliser est nécessaire au bon fonctionnement de la transmission didactique.

Pour repérer et étudier ces conceptions, elles vont se référer aux travaux sur les représentations des psychologues sociaux. Ces travaux ont montré en effet que « *les représentations sociales, en tant que système d'interprétation régissant notre relation au monde et aux autres, orientent et organisent les conduites et communications sociales.* » (Jodelet 1989). L'exploitation visée les conduit à particulariser ces représentations au domaine professionnel de l'enseignant et c'est ainsi qu'elles introduisent la notion de représentation métacognitive pour désigner:

« *les conceptions des enseignants sur les mathématiques, sur la manière de les enseigner et de les apprendre, avec les conséquences sur leurs pratiques professionnelles.* »

L'analyse et la catégorisation de ces représentations métacognitives va s'effectuer en s'appuyant sur la notion de « *noyau-central* » introduite, elle aussi, par les psychologues sociaux (Abric 1987). Il est défini comme un ensemble d'éléments jouant un rôle privilégié dans la représentation: c'est à partir de ce

noyau que s'organise l'ensemble de la conception et il tend d'autre part à être renforcé par les expériences que vit l'individu. Trois composantes seront distinguées dans ce noyau correspondant aux trois entrées: épistémologique, sociale et cognitivo-pédagogique. Cette catégorisation permet à A.Robert et J.Robinet d'élaborer une grille qui servira à analyser l'ensemble des traces directes et indirectes de représentations recueillies (entretiens, questionnaires, transcriptions de séquences d'enseignement, textes d'exercices de manuels, textes sur l'enseignement...). Les premiers résultats obtenus semblent permettre de repérer des pôles où se cristalliseraient les différences constatées entre les représentations sans que l'on puisse pour autant parler encore de profils. A.Robert écrit à ce propos (Robert 1989):

«Par exemple le temps du silence de l'enseignant dans la classe, l'utilisation par lui du registre métamathématique, le rôle qu'il donne à ses explications d'une part, aux erreurs des élèves d'autre part, le choix qu'il fait des activités des élèves (types d'activités - exercices d'application/problèmes ouverts, durée réservée aux activités/durée du cours, places respectives dans le temps des activités/du cours, adéquation contrôles/activités), sont autant d'éléments des représentations auxquels on a accès et qui en fait nous semblent différencier suffisamment les pratiques pour avoir des incidences sur les apprentissages, d'où leur intérêt.»

Nous voudrions souligner ici que tous les travaux cités dans ce dernier paragraphe sont des travaux qui débutent. Leur exploitation didactique pour l'étude de la transmission ou de la reproductibilité n'a pour l'instant rien d'évident. En particulier, on peut se demander...

- En quoi les représentations métacognitives des enseignants ainsi définies déterminent-elles les décisions qu'ils prennent dans leur enseignement, globalement et localement? En d'autres termes, en quoi les contraintes du système leur laissent-elles un espace suffisant pour s'exprimer de manière efficace?
- En quoi influencent-elles les représentations métacognitives des élèves eux-mêmes et leurs apprentissages? On ne peut espérer obtenir à court terme des réponses fiables à ces questions et il faut avouer que les travaux en cours posent de plus des problèmes méthodologiques très délicats. Mais ils participent de cette meilleure prise en compte de l'enseignant dont nous posions la nécessité dans le paragraphe précédent, prise en compte qui, en dépit des difficultés qu'elle pose, ne constitue pas moins un des passages obligés de l'avancée de la didactique à l'heure actuelle.

Paru dans: *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 9/3, 281-308, Grenoble, La pensée Sauvage éditions 1988.